

Reihen für Bruchfolgen

Viele Formeln
und Methoden, wie man weitere erstellt.
Dazu Beweise durch vollständige Induktion

Eine spannende Fundgrube für Lehrer
und Studenten

Datei Nr. 40100

Stand 14. April 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese Datei hat eine nette Entstehungsgeschichte. Ich unterrichte derzeit einen Leistungskurs Mathematik und habe sehr ausführlich Folgen, Reihen und Vollständige Induktion behandelt.

Dabei fiel mir auf, dass ich eigentlich nur zwei Beispiele für Bruchfolgen bzw. deren Reihen hatte. Und diese stammten aus Abituraufgaben. Nun schüttelt man sich solche Summenformeln nicht einfach aus dem Ärmel. Die Suche in diversen Schul- und Hochschulbüchern brachte nichts zutage. Also jammerte ich meinen Schülern etwas vor und setzte einen Preis von 10 € aus für denjenigen, der hier „Neues“ bieten könnte. Daraufhin setzten sich meine fleißigen Mädchen Eva und Laura hin und es dauerte nicht lange, bis die ersten drei neuen Formeln vor mir lagen.

Sofort kamen auch Ideen auf, wie man vermutlich beliebig viele weitere Summen bilden konnte. So arbeiteten wir daran weiter und ich begann mit der Niederschrift der ersten Ergebnisse. Es fielen mir einige Tricks ein, wie man aus bekannten Formeln „neue“ machen konnte, aber ich blieb immer wieder an einer Summe hängen:

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} = ?$$

Laura wandte ihre Idee der Verallgemeinerung einer schon gefundenen Lösungsformel an und entdeckte:

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

was dann auch schnell mit Vollständiger Induktion bewiesen war.

Ich habe dann diese Verallgemeinerung zu einer „schlimmen“ Summen-Formel gemacht und hier finden Sie den Beweis dazu. Es gibt jetzt also unendlich viele ganz unterschiedliche Reihenformeln mit 2 Faktoren im Nenner. Dann reizte es natürlich, Summen mit 3 Faktoren zu untersuchen.

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = ???$$

Ich schildere am Ende des Textes, wie fast schon abenteuerlich die Suche nach dem Ergebnis war. Ja, und nun geht die Suche nach solchen Bruchsummen vielleicht weiter. Ist ja auch spannend.

Nur – lieber Leser. Diese Abhandlung gibt es nur auf der Mathematik-CD. Meine Web-Site wird nur eine kurze Kostprobe enthalten! So viel Mühe verschenkt man nicht einfach!

Viele der hier gezeigten Reihenformeln werden durch die vollständige Induktion bewiesen.

Friedrich Buckel

13.6.2003

Inzwischen befinden sich zum Thema Vollständige Induktion diese Texte auf der Mathematik-CD:

- 40080 Ausführliche Einführung und erste Beispiele
- 40100 Sammlung von Summenformeln für Bruchreihen
- 40101 Sammlung von Beispielen aller Art, teils höheres Niveau
- 40701 Zahlenfolgen, höheres Niveau
- 45021 Ableitung von e-Funktionen, Beweise mit vollständiger Induktion

Inhalt

1. Einleitung 5

$$B1: \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} \quad 5$$

$$B2: \frac{12}{4 \cdot 5} + \frac{12}{5 \cdot 6} + \frac{12}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{12}{(n+3)(n+4)} = \frac{3n}{n+4} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{12}{(i+3)(i+4)} \quad 5$$

2. Neue Reihenformeln – 1. Schritt

$$B3: \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{2}{(i+1)(i+2)} \quad 6$$

$$B4: \frac{6}{3 \cdot 4} + \frac{6}{4 \cdot 5} + \frac{6}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{2n}{n+3} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{6}{(i+2)(i+3)} \quad 7$$

$$B5: \frac{5}{5 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 7} + \frac{5}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{5}{(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{5}{(i+4)(i+5)} \quad 8$$

$$B6: \frac{k}{k(k+1)} + \frac{k}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{k}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{n}{n+k} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{k}{(n+k-1)(n+k)} \quad 9$$

$$B7: \frac{10}{10 \cdot 11} + \frac{10}{11 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{10}{(n+9)(n+10)} = \frac{n}{n+10} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{10}{(i+9)(i+10)} \quad 10$$

$$B8: \frac{11}{11 \cdot 12} + \frac{11}{12 \cdot 13} + \frac{11}{13 \cdot 14} + \dots + \frac{11}{(n+10)(n+11)} = \frac{n}{n+11} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{11}{(i+10)(i+11)} \quad 10$$

3. Neue Reihenformeln aus alten gewinnen 11

4. Die nächsten Reihenformeln 14

$$B9: \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \quad 14$$

$$B10: \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{n}{4n+4} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i(2i+2)} \quad 15$$

$$B11: \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} \quad 17$$

$$B12: \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} \quad 17$$

$$B13: \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{n}{5n+1} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(5i-4)(5i+1)} \quad 18$$

$$RF2: \frac{1}{1 \cdot (1+d)} + \frac{1}{(1+d)(1+2d)} + \frac{1}{(1+2d)(1+3d)} + \dots + \frac{1}{(1+(n-1)d)(1+nd)} = \frac{n}{dn+1} \quad 19$$

$$B14: \frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 31} + \dots + \frac{1}{(1+(n-1)10)(1+10n)} = \frac{n}{10n+1} \quad 20$$

$$B15: \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} \quad 21$$

$$B16: \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 14} + \dots + \frac{1}{(4n-2)(4n+2)} = \frac{n}{4(2n+1)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(4i-2)(4i+2)} \quad 22$$

$$B17: \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(4i-1)(4i+3)} \quad 23$$

$$RF3: \frac{1}{(d+a)(2d+a)} + \frac{1}{(2d+a)(3d+a)} + \dots + \frac{1}{(nd+a)((n+1)d+a)} = \frac{n}{(d+a)((n+1)d+a)} \quad 24$$

$$B18 \quad \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 23} + \dots + \frac{1}{(6n-1)(6n+5)} = \frac{n}{5(6n+5)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(6i-1)(6i+5)} \quad 26$$

$$\frac{5}{5 \cdot 11} + \frac{5}{11 \cdot 17} + \frac{5}{17 \cdot 23} + \dots + \frac{5}{(6n-1)(6n+5)} = \frac{n}{6n+5} \quad \sum_{i=1}^n \frac{5}{(6i-1)(6i+5)} \quad 26$$

$$B19: \frac{1}{25 \cdot 37} + \frac{1}{37 \cdot 49} + \frac{1}{49 \cdot 61} + \dots + \frac{1}{(12n+13)(12n+25)} = \frac{n}{25(12n+25)} \quad 26$$

$$B20: \frac{1}{57 \cdot 80} + \frac{1}{80 \cdot 103} + \dots + \frac{1}{(23n+34)(23n+57)} = \frac{n}{57(23n+57)} \quad 26$$

$$B21: \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{n \cdot (2n+2)} = \frac{n}{2(n+1)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(2i+2)} \quad 27$$

$$B22: \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2n \cdot (n+1)} = \frac{n}{2(n+1)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i(i+1)} \quad 27$$

5. Und nun 3 Faktoren im Nenner 29

$$B23 \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(4n+1)(n+2)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} \quad 29$$

$$B24: \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{(4n+1)(n+2)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{4}{i(i+1)(i+2)} \quad 29$$

$$B25: \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+5)}{3(n+2)(n+3)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{4}{(i+1)(i+2)(i+3)} \quad 31$$

$$B26: \frac{12}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{12}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{12}{(i+1)(i+2)(i+3)} \quad 31$$

$$B27: \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2(2n+2)(2n+4)} = \frac{n(n+3)}{32(n+1)(n+2)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i(2i+2)(2i+4)} \quad 32$$

1. Einleitung

In der Datei 40080 wurden Bruchfolgen und ihre Summenformeln durch vollständige Induktion bewiesen. Etwa diese:

B1:
$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

und

B2:
$$s_n = \frac{12}{4 \cdot 5} + \frac{12}{5 \cdot 6} + \frac{12}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{12}{(n+3)(n+4)} = \sum_{i=1}^n \frac{12}{(i+3)(i+4)} = \frac{3n}{n+4}$$

Da ich bei der Erstellung dieses Textes keine weiteren Beispiele dieser Art kannte, habe ich meinen Leistungskurs aufgefordert, ähnliche Beispiele selbst zu finden. Dies hat zu erstaunlichen Ergebnissen geführt. Einige kann man verallgemeinern, so dass nunmehr beliebig viele (gleichartige) Reihenformeln zur Verfügung stehen. Ich selbst habe dann den Typ der Folge leicht verändert und weitere Beispiele gefunden.

Zuvor gebe ich für Leser eine kleine Hilfestellung, gezeigt am Beispiel B1.

Dort liegt diese Zahlenfolge zugrunde: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$,

also $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$; $a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$; $a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$; $a_4 = \frac{1}{4 \cdot 5}$; ...

Als „Reihe“ bezeichnet man die Folge der Teilsummen:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2+1}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{3 \cdot 4} = \frac{9}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5 + 1}{4 \cdot 5} = \frac{16}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5} \quad \text{usw.}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

oder mit der Summenformel geschrieben: $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Die Behauptung lautet: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Und in 40080 wurde dies durch vollständige Induktion bewiesen.

2. Neue Reihenformeln

Beispiel 3

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

Zeige durch vollständige Induktion, dass für die zugehörige Reihe gilt:

$$s_n = \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} \quad \text{bzw.} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{2}{(i+1)(i+2)} = \frac{n}{n+2}$$

Zuerst einige Ausblicke auf Folge und Reihe:

Folge: $a_1 = \frac{2}{2 \cdot 3}; a_2 = \frac{2}{3 \cdot 4}; a_3 = \frac{2}{4 \cdot 5}; a_4 = \frac{2}{5 \cdot 6}; \dots$

Reihe: $s_1 = a_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad s_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{4+2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4 \cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{5+1}{2 \cdot 5} = \frac{6}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

Beweis der Reihenformel durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Formel, denn es ist $s_1 = a_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

und andererseits liefert die rechte Seite $\frac{n}{n+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ für $n = 1$.

Annahme: Die Summenformel gilt für alle natürlichen Zahlen von 1 bis n :

$$s_n = \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}. \quad (1)$$

Wir zeigen, dass daraus die Summenformel für $n+1$ folgt.

Behauptung: $s_{n+1} = \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}$

Wir berechnen die linke Seite, indem wir zur als richtig angenommenen Formel (1) den nächsten Summanden $\frac{2}{(n+2)(n+3)}$ beidseitig addieren. Dann haben wir die gewünschte linke Seite und erhalten:

$$s_{n+1} = \frac{n}{n+2} + \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)+2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)}$$

Nun wird der Zähler faktorisiert. Dazu berechnet man seine Nullstellen:

$$n^2 + 3n + 2 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Also kann man den Zähler so zerlegen: $Z = (n+1)(n+2)$. Es folgt:

$$s_{n+1} = \frac{n}{n+2} + \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)+2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}$$

was zu beweisen war.

Beispiel 4

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$

Zeige durch vollständige Induktion, dass für die zugehörige Reihe gilt:

$$s_n = \frac{6}{3 \cdot 4} + \frac{6}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{2n}{n+3} \quad \text{bzw.} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{6}{(i+2)(i+3)} = \frac{2n}{n+3}$$

Zuerst einen Ausblick auf Folge und Reihe:

Folge: $a_1 = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{6}{4 \cdot 5} = \frac{3}{10}; \quad a_3 = \frac{6}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5}; \quad a_4 = \frac{6}{6 \cdot 7} = \frac{1}{7} \dots$

Reihe: $s_1 = a_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad s_3 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$

Beweis durch vollständige Induktion:

Demo-Text für www.mathe-cd.de