ANALYSIS

Reihen für Bruchfolgen

Viele Formeln

und Methoden, wie man weitere erstellt.

Dazu Beweise durch vollständige Induktion

Eine spannende Fundgrube für Lehrer
und Studenten

Datei Nr. 40100

Stand 14. April 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese Datei hat eine nette Entstehungsgeschichte. Ich unterrichte derzeit einen Leistungskurs Mathematik und habe sehr ausführlich Folgen, Reihen und Vollständige Induktion behandelt.

Dabei fiel mir auf, dass ich eigentlich nur zwei Beispiele für Bruchfolgen bzw. deren Reihen hatte. Und diese stammten aus Abituraufgaben. Nun schüttelt man sich solche Summenformeln nicht einfach aus dem Ärmel. Die Suche in diversen Schul- und Hochschulbüchern brachte nichts zutage. Also jammerte ich meinen Schülern etwas vor und setzte einen Preis von 10 € aus für denjenigen, der hier „Neues" bieten könnte. Daraufhin setzten sich meine fleißigen Mädchen Eva und Laura hin und es dauerte nicht lange, bis die ersten drei neuen Formeln vor mir lagen.

Sofort kamen auch Ideen auf, wie man vermutlich beliebig viele weitere Summen bilden könnte. So arbeiteten wir daran weiter und ich begann mit der Niederschrift der ersten Ergebnisse. Es fielen mir einige Tricks ein, wie man aus bekannten Formeln „neue" machen konnte, aber ich blieb immer wieder an einer Summe hängen:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}=?$$

Laura wandte ihre Idee der Verallgemeinerung einer schon gefundenen Lösungsformel an und entdeckte:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

was dann auch schnell mit Vollständiger Induktion bewiesen war.

Ich habe dann diese Verallgemeinerung zu einer „schlimmen" Summen-Formel gemacht und hier finden Sie den Beweis dazu. Es gibt jetzt also unendlich viele ganz unterschiedliche Reihenformeln mit 2 Faktoren im Nenner. Dann reizte es natürlich, Summen mit 3 Faktoren zu untersuchen.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)}=???$$

Ich schildere am Ende des Textes, wie fast schon abenteuerlich die Suche nach dem Ergebnis war. Ja, und nun geht die Suche nach solchen Bruchsummen vielleicht weiter. Ist ja auch spannend.

Nur – lieber Leser. Diese Abhandlung gibt es nur auf der Mathematik-CD. Meine Web-Site wird nur eine kurze Kostprobe enthalten! Soviel Mühe verschenkt man nicht einfach!

Viele der hier gezeigten Reihenformeln werden durch die vollständige Induktion bewiesen.

Friedrich Buckel 13.6.2003

Inzwischen befinden sich zum Thema Vollständige Induktion diese Texte auf der Mathematik-CD:

40080	Ausführliche Einführung und erste Beispiele
40100	Sammlung von Summenformeln für Bruchreihen
40101	Sammlung von Beispielen aller Art, teils höheres Niveau
40701	Zahlenfolgen, höheres Niveau
45021	Ableitung von e-Funktionen, Beweise mit vollständiger Induktion

Inhalt

1. Einleitung

In der Datei 40080 wurden Bruchfolgen und ihre Summenformeln durch vollständige Induktion bewiesen. Etwa diese:

B1: $$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

und

B2: $$s_n = \frac{12}{4\cdot 5} + \frac{12}{5\cdot 6} + \frac{12}{6\cdot 7} + \ldots + \frac{12}{(n+3)(n+4)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{12}{(i+3)(i+4)} = \frac{3n}{n+4}$$

Da ich bei der Erstellung dieses Textes keine weiteren Beispiele dieser Art kannte, habe ich meinen Leistungskurs aufgefordert, ähnliche Beispiele selbst zu finden. Dies hat zu erstaunlichen Ergebnissen geführt. Einige kann man verallgemeinern, so dass nunmehr beliebig viele (gleichartige) Reihenformeln zur Verfügung stehen. Ich selbst habe dann den Typ der Folge leicht verändert und weitere Beispiele gefunden.

Zuvor gebe ich für Leser eine kleine Hilfestellung, gezeigt am Beispiel B1.

Dort liegt diese Zahlenfolge zugrunde: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$,

also $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$; $a_2 = \frac{1}{2\cdot 3}$; $a_3 = \frac{1}{3\cdot 4}$; $a_4 = \frac{1}{4\cdot 5}$; ....

Als „Reihe“ bezeichnet man die Folge der Teilsummen:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{3+1}{2\cdot 3} = \frac{4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4} = \frac{9}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3\cdot 5+1}{4\cdot 5} = \frac{16}{4\cdot 5} = \frac{4}{5} \quad \text{usw.}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

oder mit der Summenformel geschrieben: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Die Behauptung lautet: $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Und in 40080 wurde dies durch vollständige Induktion bewiesen.

2. Neue Reihenformeln

Beispiel 3

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

Zeige durch vollständige Induktion, dass für die zugehörige Reihe gilt:

$s_n = \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$ bzw. $= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{(i+1)(i+2)} = \frac{n}{n+2}$

Zuerst einige Ausblicke auf Folge und Reihe:

Folge: $a_1 = \frac{2}{2\cdot 3};\ a_2 = \frac{2}{3\cdot 4};\ a_3 = \frac{2}{4\cdot 5};\ a_4 = \frac{2}{5\cdot 6};\ \ldots$

Reihe: $s_1 = a_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $s_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4} = \frac{4+2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4\cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{5+1}{2\cdot 5} = \frac{6}{2\cdot 5} = \frac{3}{5}$

Beweis der Reihenformel durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Formel, denn es ist $s_1 = a_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

und andererseits liefert die rechte Seite $\frac{n}{n+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ für $n = 1$.

Annahme: Die Summenformel gilt für alle natürlichen Zahlen von 1 bis n:

$$s_n = \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}. \quad (1)$$

Wir zeigen, dass daraus die Summenformel für n+1 folgt.

Behauptung: $\boxed{s_{n+1} = \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}}$

Wir berechnen die linke Seite, indem wir zur als richtig angenommenen Formel (1) den nächsten Summanden $\frac{2}{(n+2)(n+3)}$ beidseitig addieren. Dann haben wir die gewünschte linke Seite und erhalten:

$$s_{n+1} = \frac{n}{n+2} + \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)+2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)}$$

Nun wird der Zähler faktorisiert. Dazu berechnet man seine Nullstellen:

$$n^2 + 3n + 2 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}.$$

Also kann man den Zähler so zerlegen: $Z = (n+1)(n+2)$. Es folgt:

$$s_{n+1} = \frac{n}{n+2} + \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)+2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}$$

was zu beweisen war.

Beispiel 4

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$

Zeige durch vollständige Induktion, dass für die zugehörige Reihe gilt:

$s_n = \frac{6}{3\cdot 4} + \frac{6}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{2n}{n+3}$ bzw. $= \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{(i+2)(i+3)} = \frac{2n}{n+3}$

Zuerst einen Ausblick auf Folge und Reihe:

Folge: $a_1 = \frac{6}{3\cdot 4} = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{6}{4\cdot 5} = \frac{3}{10}$; $a_3 = \frac{6}{5\cdot 6} = \frac{1}{5}$; $a_4 = \frac{6}{6\cdot 7} = \frac{1}{7}$; ...

Reihe: $s_1 = a_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $s_3 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$

Beweis durch vollständige Induktion: